数理解析研究所講究録 1281 巻 2002 年 33-49

MOTIVES AND SIEGEL MODULAR FORMS

吉田敬之（京大理）

Motive と保型形式の広大な分野を survey することは私の力に余ることである. ここでは私の論文 [Y2] と [Y3] によって解説を試みたい.

Motive の理論により周期とゼータ函数の特殊値についてかなりの見通しを得ることができる. たとえば二つの motive M, N について $M \otimes N$ の Deligne の周期を表すことは基本的な重要性をもつ. (Rankin-Selberg 型の convolution を想起されたい.) このためには Deligne の周期のみでは不十分であり, motive の基本周期として十分な周期不変量を導入しておく必要がある. そしてこの考察を Siegel modular form に適用する. これは [Y2] で行ったことである.

しかし motive 理論のみでは予想に止まっていて, 実際の証明には保型形式を用いなければならない. これが [Y2] と保型形式の側での志村による強力な道具を解説した [Y3] をからませた理由である. このような状況が遠い将来に変わることがあるかは私には分からない. motive 理論の側からは, Tate 予想, standard 予想等の困難な問題が解決すれば相当程度保型形式の利用を節約できると思われるけれども.

§1. Critical values

ゼータ函数の critical value についての 1977 年までの主要な歴史的事件を要約してみよう.

$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{Leibnitz, 1670 年頃.}$$

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \text{Euler, 1735, 実験的に発見したものと思われる.}$$

$$\zeta(2n)/\pi^{2n} \in \mathbf{Q}, \quad 1 \leqq n \in \mathbf{Z}, \qquad \text{Euler, 1742.}$$

$$\sum_{z} z^{-4n}/\varpi^{4n} \in \mathbf{Q}, \quad 1 \leqq n \in \mathbf{Z}, \qquad \text{Hurwitz, 1899.}$$

ここに z は 0 でない Gauss 整数全体の上を走り, $\varpi = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ である. この結果は勿論 Euler の定理の類似を狙ったものである.

$$\frac{L(n,\Delta)}{(2\pi i)^n c^{\pm}(\Delta)} \in \mathbf{Q}, \qquad 1 \leqq n \leqq 11, \quad \pm 1 = (-1)^n, \qquad \text{Shimura, 1959.}$$

ここに

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n = q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24}, \qquad q = \exp(2\pi i z)$$

は $SL(2,\mathbf{Z})$ に関する weight 12 の cusp form であり, $c^{\pm}(\Delta)\in\mathbf{R}^{\times}$.
　同様に primitive Hecke eigenform $f\in S_k(\Gamma_0(N),\psi)$ と $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ に対して

$$\left(\frac{L(n,f)}{(2\pi i)^n c^{\pm}(f)}\right)^{\sigma}=\frac{L(n,f^{\sigma})}{(2\pi i)^n c^{\pm}(f^{\sigma})},$$
$$1\leqq n\leqq k-1,\quad \pm 1=(-1)^n,\qquad \text{Shimura, 1977}$$

が成り立つ. ここに $c^{\pm}(f^{\sigma})\in\mathbf{C}^{\times}$ ([Sh4]).

　これらの結果により, ゼータ函数の critical value はアーベル積分の周期に関係していることが予期される訳である. これをはっきりした形にしたのが Deligne の予想であるが, これについては後で述べよう. 現在使われている critical value の定義は (幾分曖昧に言うと) 次のように述べられる. 良いゼータ函数 $Z(s)$ にその gamma factor $G(s)$ をかけたものが, reflexion $s\to v-s$ について標準的な函数等式をみたしていると仮定しよう. このとき $n\in\mathbf{Z}$ で, $G(n)$ かつ $G(v-n)$ が有限であれば $Z(n)$ はゼータ函数 $Z(s)$ の critical value であると呼ばれる.

§2. 志村の方法

　この節ではゼータ函数の積分表示から critical value についての情報を引き出す志村の方法 ([Sh3]) について解説しよう.
　正整数 N に対して $SL(2,\mathbf{Z})$ の合同部分群 $\Gamma_0(N)$ を
$\Gamma_0(N)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbf{Z})\,\middle|\,c\equiv 0\mod N\right\}$ によって定義する. $\mathfrak{H}$ は複素上半平面を表す. $0\leqq\lambda\in\mathbf{Z}$, $z=x+iy\in\mathfrak{H}$ と $s\in\mathbf{C}$ について Eisenstein series $E_\lambda(z,s)$ を

$$E_\lambda(z,s)=\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)}(cz+d)^{-\lambda}|cz+d|^{-2s},\qquad \Gamma_\infty=\left\{\pm\begin{pmatrix}1&m\\0&1\end{pmatrix}\,\middle|\,m\in\mathbf{Z}\right\}$$

によって定める. ここに $\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ は $\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)$ の完全代表系を走る. この和は $\Re(2s)>2-\lambda$ のときに収束する. $E_\lambda(z,s)$ の解析的性質は良く知られている. それは全 s 平面に有理型に解析接続される. また $\lambda>0$ ならば $\Re(s)\geqq 1/2-\lambda/2$ において s の正則函数である.
　微分作用素とその iterations を

$$\delta_\lambda=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\lambda}{2iy}\right),\quad y=\Im(z),\qquad \delta_\lambda^{(r)}=\delta_{\lambda+2r-2}\cdots\delta_{\lambda+2}\delta_\lambda,\qquad \delta_\lambda^{(0)}=1$$

によって定める. δ_λ は weight λ の C^∞-保型形式を weight $\lambda+2$ の C^∞-保型形式に写す微分作用素である.
　$\lambda>0$ と仮定して $E_\lambda(z)=E_\lambda(z,0)$ とおく. このとき

$$E_{\lambda+2r}(z,-r)=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+r)}(-4\pi y)^r\delta_\lambda^{(r)}E_\lambda(z)\tag{2.1}$$

が成り立つ.
　$f=\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n$, $g=\sum_{n=0}^{\infty}b_nq^n$ を $\Gamma_0(N)$ に関するそれぞれ weight k, l の正則な modular form とする. (簡単のため方法は trivial character の modular form について述べることにす

る．また $a_n \in \mathbf{R}$ と仮定する.) Dirichlet 級数を $D(s,f,g)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n n^{-s}$ によって定義する. $k>l$ かつ f は cusp form であると仮定する. Rankin-Selberg の方法によって

$$(2.2)\qquad (4\pi)^{-s}\Gamma(s)D(s,f,g)=\int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}} \overline{f(z)}g(z)E_{k-l}(z,s+1-k)y^{s-1}dxdy$$

を得る. $r\in\mathbf{Z}$ を $0\leqq r,\ l+2r<k$ ととる. (2.2) において $s=k-1-r$ とし, (2.1) を $\lambda=k-l-2r$ として用いて

$$(2.3)\qquad D(k-1-r,f,g)=c\pi^k\langle f, g\delta_\lambda^{(r)}E_\lambda(z)\rangle, \qquad c\in\mathbf{Q}^\times$$

を得る. ここに $\langle\ ,\ \rangle$ は正規化された Petersson 内積を表す. 即ち $\Gamma_0(N)$ に関する weight k の C^∞-保型形式 h_1, h_2 に対して, 積分が収束する限りにおいて

$$\langle h_1,h_2\rangle=\mathrm{vol}(\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H})^{-1}\int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}}\overline{h_1(z)}h_2(z)y^{k-2}dxdy$$

とおく.

(2.3) において $g\delta_\lambda^{(r)}E_\lambda(z)$ は一般には正則ではない weight k の保型形式である. しかしその非正則性は near holomorphy の概念によって制御できる. 一変数の場合

$$(2.4)\qquad g\delta_\lambda^{(r)}E_\lambda(z)=\sum_{m=0}^{t}\delta_{k-2m}^{(m)}h_m, \qquad t=r \text{ または } r+1$$

と $\Gamma_0(N)$ に関する weight $k-2m$ の正則な modular form h_m によって分解される. さらに

$$(2.5)\qquad \langle h, g\delta_\lambda^{(r)}E_\lambda(z)\rangle=\langle h,h_0\rangle$$

が weight k の任意の正則 cusp form h に対して成り立つ. (2.4) は weight k の正則 cusp form の空間への orthogonal projection を与えている訳である.

いまひとつの重要な点は Aut(**C**) の作用との compatibility である. Aut(**C**) を Fourier 係数への作用によって modular form に作用させる. 即ち $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ に対して $f^\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^\sigma q^n$ とおくと f^σ は $\Gamma_0(N)$ に関する weight k の modular form である. 分解 (2.4) は Aut(**C**) の作用と compatible に行うことができる. さて f は normalized Hecke eigenform としよう. このとき

$$(2.6)\qquad \left(\frac{\langle f,h\rangle}{\langle f,f\rangle}\right)^\sigma=\frac{\langle f^\sigma,h^\sigma\rangle}{\langle f^\sigma,f^\sigma\rangle}, \qquad \sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$$

が任意の正則 modular form h に対して成り立つ. これらの事実を用いれば (2.3) から

$$(2.7)\qquad \left(\frac{D(k-1-r,f,g)}{\pi^k\langle f,f\rangle}\right)^\sigma=\frac{D(k-1-r,f^\sigma,g^\sigma)}{\pi^k\langle f^\sigma,f^\sigma\rangle}, \qquad 0\leqq r<(k-l)/2$$

が任意の $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ に対して成り立つことがわかる. L 函数 $L(s,f)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}$ についての §1 で述べた志村の 1977 年の結果は (2.7) を g を適当な Eisenstein 級数にとって適用することで得られる.

まとめとしてこのようにして得られる定理を二つ記しておこう. Dirichlet 指標 φ に対して $L(s,f,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)a_n n^{-s}$ とおく.

Theorem 2.1 ([Sh4], Theorem 1). *primitive Hecke eigenform* $f \in S_k(\Gamma_0(N),\chi)$, $\sigma \in Aut(\mathbf{C})$ と *Dirichlet* 指標 φ について

$$(1)\qquad \left(\frac{L(n,f,\varphi)}{(2\pi i)^n g(\varphi)c^{\pm}(f)}\right)^{\sigma} = \frac{L(n,f^{\sigma},\varphi^{\sigma})}{(2\pi i)^n g(\varphi^{\sigma})c^{\pm}(f^{\sigma})}.$$

ここに $n \in \mathbf{Z}$, $1 \leqq n \leqq k-1$, $\pm 1 = (-1)^n\varphi(-1)$ であり, $g(\varphi)$ は *Gauss* 和である.

$$(2)\qquad \left(\frac{i^{1-k}\pi g(\chi)\langle f,f\rangle}{c^{+}(f)c^{-}(f)}\right)^{\sigma} = \frac{i^{1-k}\pi g(\chi^{\sigma})\langle f^{\sigma},f^{\sigma}\rangle}{c^{+}(f^{\sigma})c^{-}(f^{\sigma})}.$$

$g \in G_l(\Gamma_0(N),\psi)$ に対して

$$\mathcal{D}(s,f,g) = L_N(2s+2-k-l,\chi\psi)D(s,f,g)$$

とおく. これは 4 次の Euler 積であり $L(s,f)$ と $L(s,g)$ の tensor 積とみなし得る. (L_N は N をわる素数 p について Euler p-factor を省くことを表す.)

Theorem 2.2([Sh4], Theorem 4). $l < k$ と仮定する. $\sigma \in Aut(\mathbf{C})$ と $l < n \leqq k$, $n \in \mathbf{Z}$ に対して

$$\left(\frac{\mathcal{D}(n,f,g)}{(2\pi i)^{l-1-2n}g(\psi)c^{+}(f)c^{-}(f)}\right)^{\sigma} = \frac{\mathcal{D}(n,f^{\sigma},g^{\sigma})}{(2\pi i)^{l-1-2n}g(\psi^{\sigma})c^{+}(f^{\sigma})c^{-}(f^{\sigma})}$$

が成り立つ.

この論文 [Sh3] は特殊値の研究に大きな影響を及ぼした. 特殊値を調べるための最も重要な要素を挙げると (i) 保型形式の算術性 (arithmeticity). 即ち少なくとも $\overline{\mathbf{Q}}$ 上有理的な保型形式の概念が必要である. (ii) 研究対象となる L 函数の explicit な積分表示. (iii) 積分表示に現れる Eisenstein 級数についての詳しい研究. (iv) 微分作用素, near holomorphy の概念と orthogonal projection の適当な表示, となる.

これらの道具立てがあれば L 函数の特殊値は深く研究できる. Shimura's machine と呼んでもよいであろう.

§3. Fundamental periods of a motive

まず motive の概念を見ておこう. [JKS] に詳しい解説があるが, ここでは Jannsen [J] によって手早く説明する.

k は体, E は標数が 0 の体とする. 目標とするのは, E に係数をもつ k 上の motive の category $\mathcal{M}_k$ を定義することである. k 上定義された projective smooth algebraic variety (これを単に variety と呼ぶ, connected とは仮定しない) X に対し, $Z^j(X,E)$ は j 次元の E-linear algebraic cycles の群を表す. $A^j(X) = A^j(X,E)$ は適当な equivalence relation $\sim$ で $Z^j(X,E)$ を割ってえられる E 上の vector space とする. ここでは考えをはっきりさせるために $\sim$ は numerical equivalence であるとする.[1] X_1, X_2, X_3 を variety とすると, algebraic correspondence の合成に対応する双線型写像

$$A^{\dim X_1+r}(X_1\times X_2)\times A^{\dim X_2+s}(X_2\times X_3)\longrightarrow A^{\dim X_1+r+s}(X_1\times X_3)$$

[1] numerical equivalence が homological equivalence と一致するという有名な予想がある. これは以下では仮定しない.

がある．とくに $A^{\dim X}(X \times X)$ は環になる．(例えば X が curve, J が X の jacobian variety とすると $A^1(X \times X) \cong \mathrm{End}(J) \otimes_{\mathbf{Z}} E$ である.) そこで $\mathcal{M}_k$ の object を

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{M}_k) = \{(X, p, m)\}$$

とする．ここに X は variety, $p \in A^{\dim X}(X \times X)$, $p^2 = p$, $m \in \mathbf{Z}$ である．即ち idempotent p を考えることにより, variety を更に仮想的に分解していることになる．(curve の例でいえば, jacobian variety J の factor を考えていることに対応する.) m は Tate twist に対応する整数である．次に objects の間の morphism を

$$\mathrm{Hom}((X, p, m), (Y, q, n)) = qA^{\dim X - m + n}(X \times Y)p$$

で定める．以上の定義により $\mathcal{M}_k$ は semi-simple abelian category になる．Tensor 積を

$$(X, p, m) \otimes (Y, q, n) = (X \times Y, p \times q, m + n)$$

とおくことにより $\mathcal{M}_k$ は tensor category になる．

$X \longrightarrow H(X)$ を cohomology theory としよう．$A_{\mathrm{hom}}^{\dim X}(X \times X)$ を numerical equivalence の代わりに homological equivalence を用いて定義した環とする．環準同型 $A_{\mathrm{hom}}^{\dim X}(X \times X) \longrightarrow A^{\dim X}(X \times X)$ がある．$M = (X, p, m) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M}_k)$ とする．p の逆像 $p' \in A_{\mathrm{hom}}^{\dim X}(X \times X)$ があって $p'^2 = p'$ をみたす (Murre).

$$H^i(M) = p'H^{i-2m}(X)$$

とおくことにより, $\mathcal{M}_k$ にまで cohomology theory を拡張できる．

$\Delta \subset X \times X$ を diagonal とする．ある Weil cohomology theory にたいして Δ の全ての Künneth 成分が algebraic と仮定する．(所謂 standard conjectures の一部.) このとき $\mathcal{M}_k$ は semi-simple E-linear Tannakian category になる．

Deligne [D] による absolute Hodge cycle を用いる motive の定義では, standard conjecture を仮定せずに motive の category は semi-simple E-linear Tannakian category になるが, motive の l-adic cohomology について仮定を導入する必要が生ずる．

要するに motive の category $\mathcal{M}_k$ はなんらの仮定をせずとも定義できるが, より深い理論を $\mathcal{M}_k$ について展開しようとすると, 何らかの仮定が必要になるのが現状である．

そこで本節の主題に入る．以下に述べることは motive の定義としていずれを採用しても関係しない．しかし明確のため Deligne の定義によるとしておく．代数体 E を固定する．J_E により E から $\mathbf{C}$ の中への同型全体の集合とする．$R = E \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \cong \mathbf{C}^{J_E}$ とおく．

M を E に係数をもつ $\mathbf{Q}$ 上の motive とする．E の finite place λ に対して M は λ-adic realization $H_\lambda(M)$ をもつ．$H_\lambda(M)$ は variety の l-adic etale cohomology を拡張したものであり, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ がその上に作用する．これから標準的な手順で R に値をもつ M の L 函数 $L(M, s)$ が定義される ([D], [Y1], §2.1 参照).

$H_B(M)$ を M の Betti realization とする．これは variety X にたいする topological cohomology $H(X(\mathbf{C}), E)$ を拡張したものである．F_∞ を複素共役写像とする．F_∞ は $H_B(M)$ に E-linear に作用するから

$$H_B(M) = H_B^+(M) \oplus H_B^-(M) \tag{3.1}$$

と E 上の vector space の直和に分解される．ここに $H_B^{\pm}(M)$ は固有値 ± 1 に対する固有空間を表す．$d = d(M) = \dim_E H_B(M)$, $d^{\pm} = d^{\pm}(M) = \dim_E H_B^{\pm}(M)$ とおく．d を M の rank という．さらに $H_B(M)$ は Hodge 分解をもつ．

$$(3.2) \qquad H_B(M) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} = \oplus_{p,q \in \mathbf{Z}} H^{pq}(M).$$

ここに $H^{pq}(M)$ は free R-module である．もし $p+q \neq w$ ならば $H^{pq}(M) = \{0\}$ が成り立つとき M は pure weight w であるという．以下 M は pure weight であると仮定する．

注意. Hodge 分解により $L(M,s)$ の函数等式の gamma factor を予想することができる．([D] 参照. root number については誤植がある.) 逆に $L(M,s)$ の函数等式の gamma factor が与えられれば M の Hodge 分解が回復される．

Deligne は周期 $c^{\pm}(M) \in R^{\times}$ を定義し(以下参照), critical value $L(M,n)$ に対して

$$L(M,n)/(1 \otimes 2\pi i)^{d^{\pm}(M)n} c^{\pm}(M) \in E$$

を予想した．ここに $\pm 1 = (-1)^n$．我々はなぜ Deligne の予想が成り立つのかを問うてもよい．その部分的説明は以下で与えられるであろう．

$H_{\mathrm{DR}}(M)$ を M の de Rham realization とする．これは variety に対する微分形式の層から得られる hypercohomology group (所謂 algebraic de Rham cohomology group) を拡張したものである．$H_{\mathrm{DR}}(M)$ は E 上の d-次元 vector space である．spectral sequence

$$(3.3) \qquad E_1^{p,q} = H^q(M, \Omega^p) \Longrightarrow H_{\mathrm{DR}}^{p+q}(M)$$

がある．この spectral sequence から得られる $H_{\mathrm{DR}}^{p+q}(M)$ 上の filtration $\{F^p\}$ を Hodge filtration という．$H_{\mathrm{DR}}^w(M) = H_{\mathrm{DR}}(M)$ であるから

$$F^p(H_{\mathrm{DR}}^w(M))/F^{p+1}(H_{\mathrm{DR}}^w(M)) \cong E_\infty^{p,w-p}, \qquad p \in \mathbf{Z}$$

が成り立つ．周知のように，この spectral sequence は E_1-terms で退化する．従って

$$(3.4) \qquad F^p(H_{\mathrm{DR}}(M))/F^{p+1}(H_{\mathrm{DR}}(M)) \cong E_1^{p,w-p} = H^{w-p}(M, \Omega^p), \qquad p \in \mathbf{Z}$$

を得る．$F^p(H_{\mathrm{DR}}(M))$ を $F^p(M)$ または単に F^p と書く．

$$I : H_B(M) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \cong H_{DR}(M) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$$

を comparison isomorphism とする．このとき

$$(3.5) \qquad I(\oplus_{p' \geqq p} H^{p'q}(M)) = F^p(M) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$$

が成り立つ．関係 (3.5) は例えば二つの motives M, N に対して $M \otimes N$ の Hodge filtration を決めるとき大切な役割をはたす．

次に M の period matrix を定義しよう．$\{v_1^+, v_2^+, \ldots, v_{d^+}^+\}$ と $\{v_1^-, v_2^-, \ldots, v_{d^-}^-\}$ をそれぞれ $H_B^+(M)$ と $H_B^-(M)$ の E 上の基底とする．Hodge filtration を

(3.6) $$H_{DR}(M) = F^{i_1} \supsetneqq F^{i_2} \supsetneqq \cdots \supsetneqq F^{i_m} \supsetneqq F^{i_{m+1}} = \{0\}$$

とかく．ここに続く項の間には異なる filtrations はないようにしておく．filtration F^{i_μ} を与えたとき i_μ は必ずしも一意的には決まらない．簡単のため i_μ, $1 \leqq \mu \leqq m$ は最大になるようにとっておくことにする．

$$s_\mu = \mathrm{rank}(H^{i_\mu, w-i_\mu}(M)), \qquad 1 \leqq \mu \leqq m$$

とおく．ここに rank は free R-module としての rank を表す．このとき

(3.7) $$i_c + i_{m+1-c} = w, \quad 1 \leqq c \leqq m, \qquad s_\mu = s_{m+1-\mu}, \quad 1 \leqq \mu \leqq m$$

が成り立ち，また partion

(3.8) $$d = s_1 + s_2 + \cdots + s_d, \qquad s_\mu > 0, \quad 1 \leqq \mu \leqq m.$$

も成り立つ．(3.5) により

$$s_\mu = \dim_E F^{i_\mu} - \dim_E F^{i_{\mu+1}}, \qquad \dim_E F^{i_\mu} = s_\mu + s_{\mu+1} + \cdots + s_m, \quad 1 \leqq \mu \leqq m.$$

を得る．$H_{DR}(M)$ の E 上の基底 $\{w_1, w_2, \ldots, w_d\}$ を $\{w_{s_1+s_2+\ldots+s_{\mu-1}+1}, \ldots, w_d\}$ が $1 \leqq \mu \leqq m$ について F^{i_μ} の基底になるようにとる．

(3.9) $$I(v_j^\pm) = \sum_{i=1}^d x_{ij}^\pm w_i, \qquad x_{ij}^\pm \in R, \quad 1 \leqq j \leqq d^\pm$$

とかいて行列 $X^\pm = (x_{ij}^\pm) \in M(d, d^\pm, R)$ を得る．P_M を分割 (3.8) に対応する $GL(d)$ の lower parabolic subgroup とする．このとき $X^\pm$ の

$$P_M(E)\backslash M(d, d^\pm, R)/GL(d^\pm, E)$$

における coset は基底のとりかたに依存しない．$X = (X^+ \, X^-) \in M(d, d, R)$ とおき，これを M の周期行列とよぶ．X の

$$P_M(E)\backslash M(d, d, R)/(GL(d^+, E) \times GL(d^-, E))$$

における coset は well defined である．ここに $GL(d^+, E) \times GL(d^-, E)$ は $GL(d)$ に diagonal blocks として埋め込まれているとする．そこで $M(d, d)$ 上の $\mathbf{Q}$ 上有理的な多項式で

(*) $$f(px\gamma) = \lambda_1(p)\lambda_2(\gamma)f(x) \qquad \text{for all } \ p \in P_M, \gamma \in GL(d^+) \times GL(d^-).$$

をみたすものを考える．ここに λ_1 and λ_2 はそれぞれ P_M, $GL(d^+) \times GL(d^-)$ の次の式で与えられる指標とする．

$$\lambda_1\left(\begin{pmatrix} p_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ * & p_{22} & \ldots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & p_{mm} \end{pmatrix}\right) = \det(p_{11})^{a_1}\det(p_{22})^{a_2}\cdots\det(p_{mm})^{a_m}, \qquad p_{ii} \in GL(s_i),$$

$$\lambda_2\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = (\det a)^{k^+}(\det b)^{k^-}, \qquad a \in GL(d^+),\ b \in GL(d^-).$$

多項式 f は type (λ_1, λ_2)，または type $\{(a_1, a_2, \ldots, a_m); (k^+, k^-)\}$ であるという．このような f 全体は $\mathbf{Q}$ 上の次数付環を生成する．

$f(X) \in R$ は mod $E^\times$ で well defined になる．$f(X)$ を M の周期不変量とよぶことにする．

Theorem 3.1. $(*)$ をみたす f 全体のなす次数付環は多項式環に同型である．生成元を *explicit* に与えることができる．また各次数成分は高々1 次元である．

$f(x)=\det(x)$, $x\in M(d,d)$ としよう．$f(x)$ は type $\{(1,1,\ldots,1);(1,1)\}$ であり $f(X)$ は Deligne の周期 $\delta(M)$ である．ある p^+ にたいして $s_1+s_2+\cdots+s_{p^+}=d^+$ としよう．$f^+(x)$ を $x\in M(d,d)$ の左上 $d^+\times d^+$-submatrix の determinant とする．このとき $f^+(x)$ は type $\{(\overbrace{1,1,\ldots,1}^{p^+},0,\ldots,0);(1,0)\}$ であり $f^+(X)$ は Deligne の定義した周期 $c^+(M)$ を与える．同様に，ある p^- について $s_1+s_2+\cdots+s_{p^-}=d^-$ ならば，$f^-(x)$ を x の右上 $d^-\times d^-$-submatrix の determinant とする．このとき $f^-(x)$ は type $\{(\overbrace{1,1,\ldots,1}^{p^-},0,\ldots,0);(0,1)\}$ であり $f^-(X)$ は Deligne の周期 $c^-(M)$ である．上の 2 条件は同値であり，また $F^{\mp}(M)$ が，従って $c^{\pm}(M)$ が定義されることと同値である (cf. [D], §1, [Y1], §2)．M が critical value を持てば，$F^{\pm}(M)$ は定義されるが逆は成り立たない．

$\mathcal{P}=\mathcal{P}(M)$ により $s_1+s_2+\cdots+s_p<\min(d^+,d^-)$ となる正整数 p の集合を表わす．$q=m-p$ とおく．このとき (3.7) により $p<q$, $s_1+s_2+\cdots+s_q=d-(s_1+\cdots+s_p)$ がわかる．

Theorem 3.2. 各 $p\in\mathcal{P}$ に対して，*type* が $\{(\overbrace{2,\ldots,2}^{p},\overbrace{1,\ldots,1}^{m-2p},\overbrace{0,\ldots,0}^{p});(1,1)\}$ である *(non-zero)* 多項式 f_p が存在する．$(*)$ をみたす任意の多項式は $\det(x)$, $f^+(x)$, $f^-(x)$, $f_p(x)$, $p\in\mathcal{P}$ の単項式として一意的に書ける．

$c_p(M)=f_p(X)$ とおく．$\delta(M)$, $c^{\pm}(M)$, $c_p(M)$, $p\in\mathcal{P}$ を motive M の基本周期とよぶ．Theorem 3.2 により，M の任意の周期不変量は基本周期の単項式として書ける．Deligne の予想は 0 が critical value のとき $L(M,0)/c^+(M)\in E$ を主張する．$c^+(M)$ 以外の周期不変量は M に tensor product, exterior power 等の様々な代数的操作を行うと現れてくる．Deligne は $c^{\pm}(M)\in R^{\times}$ を示した．他の周期不変量も R の可逆元であることを証明できる．Deligne の予想は $L(M,0)$ が最も簡単な基本周期でかけることを意味する．以下周期不変量の間の等式は mod $E^{\times}$ で解することにする．

motive に代数的操作を施したときの基本周期の変化を調べる原理を説明しよう．例として $M=M_1\otimes M_2\otimes\cdots\otimes M_n$ の場合を考える．ここに全ての motive は $\mathbf{Q}$ 上に定義されていて，係数は E にもつとする．$1\leqq i\leqq n$ に対して X_i を M_i の周期行列，X を M の周期行列とする．次ぎのことがわかる．

(i) X の各成分は X_i の成分の有理数係数の多項式として表わされる．

(ii) X_i を $P_{M_i}(E)X_i(GL(d^+(M_i),E)\times GL(d^-(M_i),E))$ に属する行列でおきかえれば，X は $P_M(E)X(GL(d^+(M),E)\times GL(d^-(M),E))$ に属する行列でおきかわる．

(i) と (ii) は X_i の各成分を変数とみなしたときにも成り立つ．今 $p\in\mathcal{P}(M)$, $c_p(M)=f_p(X)$ を M の基本周期とする．ここに f_p は $M(d(M),d(M))$ 上の多項式である．(i) により，多項式 g により $c_p(M)=f_p(g(X_1,\ldots,X_n))$ となる．X_i を $M(d(M_i),d(M_i))$ 上の変数行列とみなす．(ii) により，$f_p(g(X_1,\ldots,X_n))$ は X_i の（成分の）多項式 f_i として（或る (λ_1,λ_2) について）$(*)$ をみたす．Theorem 3.1 の 1 次元性により，$c_p(M)=f_1(X_1)\cdots f_n(X_n)$ と分解する．同じ議論は $c^{\pm}(M)$, $\delta(M)$ にも適用される．よって M の基本周期は M_i, $1\leqq i\leqq n$ の基本周期の単項式として表わされる．M の基本周期の計算は f_i の type を決めるという組み合わせ論的な問題に帰着される．

以上の議論で興味深いのは Theorem 3.1 は（この定理の証明は難しくはないが）motive の考察から apriori に予見できることである（証明できるという意味ではない）．

4. Review of Shimura "Arithmeticity in the theory of automorphic forms"

この本 [Sh10] は [Sh9] の続編であるが, かなりの部分は独立に読むことができる. まずどのような保型形式を考えるかを説明する.

F は総実代数体, K は F の総虚 2 次拡大体 (CM 体) とする. ρ を $\mathrm{Gal}(K/F)$ の生成元とする.

$$G = Sp(n, F) \qquad \text{(Case Sp)},$$
$$G = \{\alpha \in GL_{2n}(K) \mid \alpha\eta_n\alpha^* = \eta_n\}, \quad \eta_n = \begin{bmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(Case UT = unitary tube)},$$
$$G = \{\alpha \in GL_n(K) \mid \alpha T\alpha^* = T\}, \qquad \text{(Case UB = unitary ball)},$$

と 3 通りの場合にわけて群を定義する. G を F 上定義された代数群とみなす. ここに $\alpha^* = {}^t\alpha^\rho$, $T \in GL_n(K)$, $T^* = -T$ である.

しばらく $F = \mathbf{Q}$ としよう. G の real points の群 G_∞ は附随する対称空間 H の上に作用する.

$$(4.1) \qquad H = \begin{cases} \{z \in M(n, n, \mathbf{C}) \mid {}^tz = z,\ \Im(z) > 0\} & \text{(Case Sp)}, \\ \{z \in M(n, n, \mathbf{C}) \mid i(z^* - z) > 0\} & \text{(Case UT)}, \\ \{z \in M(p, q, \mathbf{C}) \mid 1_q - z^*z > 0\} & \text{(Case UB)}. \end{cases}$$

ここに (p, q), $p + q = n$ は iT の符号である. また $z^* = {}^t\bar{z}$ で > 0 は hermite 行列が正定値であること意味する.

Case UB を考えよう. 値を $GL_p(\mathbf{C}) \times GL_q(\mathbf{C})$ にとる標準的な保型因子 $M(g, z)$, $g \in G_\infty$, $z \in H$ がある. ω を $GL_p(\mathbf{C}) \times GL_q(\mathbf{C})$ の $\mathbf{C}$ 上の有限次元ベクトル空間 X における表現とする. Γ を G の合同部分群とする. H 上の X に値をとる正則函数 f は

$$f(\gamma z) = \omega(M(\gamma, z))f(z) \qquad \text{for all} \quad \gamma \in \Gamma,\ z \in H$$

をみたすとき, Γ に関する weight ω の正則保型形式であるという. ($n = 2$ のときはさらに cusp での条件をつける.) C^∞ および有理型保型形式も同様に定義する. SP, UT の場合も同様である.

一般の F については対称領域 H は (4.1) の形の領域の積になる. また保型形式としては adele 群 G_A 上の保型形式も考えるが, これは H 上の保型形式の (ある条件をみたす) 有限個の集まりを考えていることと同等である.

Sp, UT の場合は H が tube domain となり, 保型形式は標準的な Fourier 展開をもつ.

$$f(z) = \sum_h a_h \exp(2\pi i\,\mathrm{tr}(hz)), \qquad z \in H, \quad a_h \in X.$$

これが Case UT は Case UB の特別な場合であるが, とくに別に詳しく調べられている理由である.

次に保型形式の arithmeticity を定義する. 背景にあって基礎を提供するのは canonical model の理論である. Γ を G の合同部分群とする. $\Gamma\backslash H$ は projective algebraic variety の Zariski open subset になる (Bailey-Borel-Satake). canonical model の理論により次のことがわかる. $\Gamma\backslash H$ はある代数体 k_Γ の上に定義された model をもつ. したがって k_Γ 上有理的な保型函数の概念を得る. このような保型函数の H 上の CM-point における値は代数的であり, explicit reciprocity law を

X は $\overline{\mathbf{Q}}$-structure をもつ, すなわち $\overline{\mathbf{Q}}$ 上のベクトル空間 X_0 により $X = X_0 \otimes_{\overline{\mathbf{Q}}} \mathbf{C}$ と仮定して一般性を失わない. Case SP または UT の場合を考える. 保型形式が arithmetic であることを, その Fourier 係数が X_0 に属することとして定義する. この定義を有理型保型形式の場合にも拡張しておく. Fourier 係数による arithmeticity のこの定義は簡単すぎるようにみえるが次のような深い性質をもつ.

1) weight が 0 (i.e., すなわち ω が trivial) の場合 arithmeticity は canonical model の理論における $\overline{\mathbf{Q}}$ 上の有理性と一致する. f と g が同じ weight の scalar 値の arithmetic な保型形式ならば f/g は arithmetic な保型函数である. CM-points では, そこで有限であるかぎり代数的な値をとる.

2) f が arithmetic な保型形式であり w が H 上の CM-point で $f(w)$ が有限ならば $\omega(\mathfrak{p}(w))^{-1}f(w) \in X_0$. ここに $\mathfrak{p}(w)$ はその成分が CM-period により explicit に表わされるある行列である.

3) arithmetic な保型形式の空間は G の作用で stable であり, 保型形式の空間の ($\mathbf{C}$ 上の) 基底を与える.

例として Eisenstein 級数

$$E_k(z) = \sum_{(c,d)}{}' (cz+d)^{-k}, \qquad z \in \mathfrak{H}$$

を考えよう. ここに $4 \leqq k \in \mathbf{Z}$ であり, 和は $(0,0)$ を除く全ての整数の組 (c,d) にわたる. §2 の Eisenstein 級数とは $N=1$ ととって $E_k(z) = 2\zeta(2k)E_k(z,0)$ の関係がある. 周知のように $E_k(z)$ は weight k の正則な modular 形式であり $\pi^{-k}E_k(z)$ の Fourier 係数は有理数である. CM-point $w=i$ については $\mathfrak{p}(w) = \pi^{-1}\varpi$ となる. したがって 2) から $\varpi^{-k}E_k(i) \in \overline{\mathbf{Q}}$ を得るが, これは §1 で述べた Hurwitz の定理と consistent である.

explicit reciprocity law は arithmetic な有理型保型形式の空間における $\mathcal{G}_+ \times \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ の作用を記述する定理として定式化される. ここに $G_A \subset \mathcal{G}_+$ は similitude の群 $\widetilde{G}_A$ のある部分群である. この定理は虚数乗法論の相互法則を実質的に全て含み, 非常に強力である.

Case UB では, 保型形式は一般には標準的な Fourier 展開をもたない. このときは 2) を arithmeticity の定義として採用する. 1) と 3) はこのときも成立する.

つぎに微分作用素と near holomorphy の概念を説明しよう.

この本で扱われている微分作用素を一般に書くのは複雑すぎるので, 典型的な場合を述べよう. 簡単のため $F = \mathbf{Q}$ とする. G_∞ の極大コンパクト部分群の複素形を K^c とする. T を H のある点における tangent space とする. K^c は T に作用する. $S_p(T)$ により T 上の p 次の斉次多項式全体のなすベクトル空間を表わす. $S_p(T)$ の既約部分空間 Z に対して微分作用素 D_ω^Z が定義される. D_ω^Z は weight ω の C^∞ 保型形式を weight $\omega \otimes Z$ の C^∞ 保型形式に写す.

例として $G = Sp(n,\mathbf{Q})$ としよう. このとき

$$T = \{z \in M(n,n,\mathbf{C}) \mid {}^t z = z\}, \qquad K^c = GL(n,\mathbf{C})$$

である. $K^c \ni a$ は T に $z \to az{}^ta$ により作用する. 表現 $x \to \det(x)^2$ は $S_n(T)$ に重複度 1 で現れる. 対応する部分空間をZ, $\omega(x) = (\det x)^k$ とすると D_ω^Z は weight を 2 上げる作用素である. $n=1$ のとき, この作用素は $2\pi i\delta_k$ である (§2 参照). contragredient な作用 $z \to {}^ta^{-1}za^{-1}$ をとると weight を 2 下げる作用素を得る.

Nearly holomorphic function は一般に Kähler manifold にたいして定義される．W を N 次元 Kähler manifold, Ω を Kähler form とする．$U \subset W$ は W の局所座標系を選べる open subset とする．このとき

$$\Omega = i \sum_{p,q=1}^{N} h_{pq} dz_p \wedge \bar{d}z_q$$

とかけるが, $\varphi \in C^\infty(U)$ が存在して

$$\Omega = i \sum_{p,q=1}^{N} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} dz_p \wedge \bar{d}z_q$$

が成り立つ．$r_q = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_q}$ とおく．可換なベクトル場 $\dfrac{\partial}{\partial r_1}, \dfrac{\partial}{\partial r_2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial r_N}$ を

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_q} = \sum_{q=1}^{N} \frac{\partial r_q}{\partial \bar{z}_p} \cdot \frac{\partial}{\partial r_q}$$

が成り立つように定義できる．

$$\mathcal{N}^{e-1}(U) = \{f \in C^\infty(U) \mid (\frac{\partial}{\partial r_1})^{e_1} \cdots (\frac{\partial}{\partial r_N})^{e_N} f = 0,\ e_1 + \cdots + e_N = e\}$$

とおく．各 U に対して $\mathcal{N}^e(U)$ に属する W 上の C^∞ 函数を W 上の e 次の nearly holomorphic function と呼ぶ．この概念は座標系のとりかたに依存しない．微分作用素を調べることにより函数の near holomorphy を確定できることは大きな利点である．

$W = H$ の場合 H 上の nearly holomorphic function は正則函数を係数とする $r_1, \ldots, r_N$ の多項式と一致する．ここに r_i は $({}^t z - \bar{z})^{-1}$ の成分である．

Nearly holomorphic automorphic form の arithmeticity は条件 2), 3) によって定義する．$\pi^{-e} D_\omega^Z$, $0 \leqq e \in \mathbf{Z}$ の形の微分作用素は near holomophy と arithmeticity を保存する．

最後にこの本の主眼であるゼータ函数の積分表示と critical value についての結果を述べよう．この部分では保型形式は scalar 値をとると仮定する．まず Case Sp と Case UT のとき, G の maximal parabolic subgroup に対応する Siegel 型の Eisenstein 級数 $E(z,s)$ の解析的性質とどのような s に対して nearly holomorphic になるかをを詳しく調べる．典型的な結果は次の通り．

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \mid c = 0 \right\}$$

を Siegel parabolic とする．簡単のため $F = \mathbf{Q}$ とする．

$$\eta(z) = i(z^* - z)\ \text{(Case UT)}, \qquad \eta(z) = i(\bar{z} - z)\ \text{(Case Sp)},$$

$\delta(z) = \det(2^{-1}\eta(z))$ とおく．

$$E(z,s) = E(z,s;k) = \sum_{\gamma \in (\Gamma \cap P) \backslash \Gamma} \delta(z)^{s-k/2} \|_k \gamma$$

によって Eisenstein 級数を定義する. ($(f\|_k\gamma)(z) = \det(M(\gamma,z)^{-k}f(\gamma z)$, $M(\gamma,z)$ は保型因子.)
Case Sp のとき $\lambda = (n+1)/2$ とおくと

$$\mu \geqq \lambda \Longrightarrow E(z,\mu/2;\mu) \in M_\mu(\mathbf{Q}_{ab}).$$

ただし $F = \mathbf{Q}$, $\lambda + 1/2 \leqq \mu \leqq \lambda + 1$ の場合を除く.

$$F = \mathbf{Q},\ \mu = \lambda + 1 \Longrightarrow E(z,\mu/2;\mu) \in \mathcal{N}_\mu^n(\mathbf{Q}_{ab}).$$

これらの事実は微分作用素を含む (2.1) と同様な関係を示し, また [Sh5] による tube domain 上の超幾何函数論を用いて Fourier 係数を解析することにより証明される.

$\mathbf{f}$ を G_A 上の Hecke eigenform とする. χ を $K_A^\times$ の algebraic Hecke character とする. (Case Sp のときは $K = F$ とする). $\mathbf{f}, \chi$ に対してゼータ函数 $Z(s,\mathbf{f},\chi)$ を定義する. F の素 ideal の上にわたる Euler 積として各 Euler 因子の次数は (有限個の素 ideal を除き) Case Sp のとき $2n+1$, Case UT のとき $4n$, Case UB のとき $2n$ である. このゼータ函数は所謂 standard L 函数を χ でtwist したものにほぼ近いが, unitary case ではこれよりも一般的である.

Case UB のときに説明しよう. T を前と同様に size n の skew hermitian matrix とする. ユニタリー群を $G = U(T)$ とかく. $\mathcal{H}^T$ により対応する対称領域を表す. $q \geqq 0$ をとって $T_q = T \oplus \eta_q$ とおく. これは T と η_q を diagonal blocks においた size $n+2q$ の行列である. $U(T_q)$ は Levi part が $U(T) \times GL_q(K)$ に同型な parabolic subgroup をもつ. 上のように $U(T)_A$ 上の cusp form $\mathbf{f}$ と Hecke character χ をとる. $\mathbf{f}$ を $\mathcal{H}^T$ 上の函数とみなす (簡単のため). $(\mathbf{f},\chi)$ に associate した Eisenstein 級数 $E(z,s;\mathbf{f},\chi)$ を導入する. この函数は $\mathcal{H}^{T_q}$ 上に定義され Langlands [L] と Klingen による cusp form に associate した Eisenstein 級数と類似である. $\widetilde{T} = T_q \oplus (-T)$, $H_{n+q} = \mathcal{H}^{\eta_{n+q}}$ とおく. このとき $U(T_q) \times U(T) \subset U(\widetilde{T}) \cong U(\eta_{n+q})$ であり, 対応する対称領域の埋め込み $\mathcal{H}^{T_q} \times \mathcal{H}^T \to H_{n+q}$ を得る. H_{n+q} 上の Siegel 型の Eisenstein 級数 $E(\tilde{z},s)$ の pull back (restriction) を $H(z,w;s)$, $z \in \mathcal{H}^{T_q}$, $w \in \mathcal{H}^T$ とする. このとき

$$c(s)Z(s,\mathbf{f},\chi)E(z,s;\mathbf{f},\chi) = \Lambda(s)\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}^T} H(z,w;s)\mathbf{f}(w)\delta(w)^k dw \tag{4.2}$$

が成り立つ. ここに $c(s)$ は explicitly に与えられるガンマ factor, $\Lambda(s)$ は F の L 函数の積である . k は $\mathbf{f}$ の weight であり, $\delta(w)$ は w の虚部の determinant である. $q = 0$ のとき, (4.2) は

$$c(s)Z(s,\mathbf{f},\chi)\mathbf{f}(z) = \Lambda(s)\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}^T} H(z,w;s)\mathbf{f}(w)\delta(w)^k dw \tag{4.3}$$

となる. (4.2), (4.3) が基礎となる L 函数の積分表示である.

さて $\sigma \in 2^{-1}\mathbf{Z}$ が或有限区間にあるとき, $E(\tilde{z},\sigma)$ は nearly holomorphic かつ arithmetic である. よって $H(z,w;\sigma)$ を explicit にわかる CM 周期でわると $\mathcal{H}^T$ 上の arithmetic nearly holomorphic functions の積の有限 1 次結合になる. これから主結果が従う. ゼータ函数の critical value について

$$Z(\sigma,\mathbf{f},\chi) \in \pi^A P\langle\mathbf{f},\mathbf{f}\rangle\overline{\mathbf{Q}}, \qquad A \in \mathbf{Z} \tag{4.4}$$

となる. ここに P は CM-周期, $\langle\mathbf{f},\mathbf{f}\rangle$ は $\mathbf{f}$ の正規化された Petersson norm である. (半整数 σ が現れる訳はゼータ函数の変数が適当に shift されているからで深い理由はない.) 次にこの結果を (4.2) に適用して $E(z,\sigma;\mathbf{f},\chi)$ の arithmeticity と near holomorphy が得られる.

同様の結果は Case SP と Case UT のときも $P=1$ として成り立つ. 特に著しいのは, Case Sp のときには half integral weight の保型形式についても平行な結果が得られていることである.

§5. Siegel modular forms

Γ を $Sp(m,\mathbf{Z})$ の合同部分群とする. $S_k^{(m)}(\Gamma)$ により Γ に関する weight k の Siegel modular cusp forms の空間を表す. Petersson norm を

$$\langle f,f\rangle=\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathfrak{H}_m)^{-1}\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}_m}|f(z)|^2(\det y)^{k-m-1}dxdy$$

と正規化しておく. ここに $\mathfrak{H}_m$ は degree m の Siegel 上半空間を表し, 実対称行列 x, y によって $z=x+iy$ とかいた. non-zero Hecke eigenform $f\in S_k^{(m)}(\Gamma)$ をとる. このとき f に対し standard L 函数 $L_{\mathrm{st}}(s,f)$, spinor L 函数 $L_{\mathrm{sp}}(s,f)$ と呼ばれる Euler 積が構成できてよく調べられている. 簡単のため $\Gamma=Sp(m,\mathbf{Z})$ とする. 以下 $w=mk-m(m+1)/2$ とおく. 素数 p に対して, α_0, α_1, ..., α_m を eigenform f に attach した Satake parameter とする. このとき $\alpha_0^2\alpha_1\cdots\alpha_m=p^w$ である. $L_{\mathrm{st}}(s,f)$ と $L_{\mathrm{sp}}(s,f)$ の Euler p 因子はそれぞれ

$$[(1-p^{-s})\prod_{i=1}^{m}(1-\alpha_ip^{-s})(1-\alpha_i^{-1}p^{-s})]^{-1},$$

$$[[(1-\alpha_0p^{-s})\prod_{r=1}^{m}\prod_{1\leqq i_1<\ldots<i_r\leqq m}(1-\alpha_0\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_r}p^{-s})]^{-1}$$

である. 一般性を失わずに f の Fourier 係数は総実代数体 E に属すると仮定できる. $\mathbf{Q}$ 上の E に係数をもつ motives $M_{\mathrm{st}}(f)$ と $M_{\mathrm{sp}}(f)$ で

$$L(M_{\mathrm{st}}(f),s)=(L_{\mathrm{st}}(s,f^\sigma))_{\sigma\in J_E},$$

$$L(M_{\mathrm{sp}}(f),s)=(L_{\mathrm{sp}}(s,f^\sigma))_{\sigma\in J_E}$$

をみたすものの存在を仮定する. Euler 積の次数を考えれば

$$\mathrm{rank}\,M_{\mathrm{st}}(f)=2m+1,\qquad \mathrm{rank}\,M_{\mathrm{st}}(f)=2^m$$

でなければならない.

Conjecture 5.1. もし *motives* $M_{\mathrm{st}}(f)$, $M_{\mathrm{sp}}(f)$ の一つが *pure weight* でなければ, f に対応する保型表現は *tempered* ではない. このとき f は次数の下がった *Siegel modular forms* からの *lifting* として得られる.

以下 $M_{\mathrm{st}}(f)$ and $M_{\mathrm{sp}}(f)$ は pure weight であると仮定する. L 函数の函数等式により (([A], [Boc2]) motives の Hodge types を確定できる. ($L_{\mathrm{sp}}(s,f)$ の函数等式は $m>3$ のときは予想に止まっている.) まず $M_{\mathrm{st}}(f)$ については

$$\wedge^{2m+1}M_{\mathrm{st}}(f)\cong T(0),$$

$$\begin{aligned} H_B(M_{\rm st}(f)) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} =& H^{0,0}(M_{\rm st}(f)) \\ & \oplus_{i=1}^{m} (H^{-k+i,k-i}(M_{\rm st}(f)) \oplus H^{k-i,-k+i}(M_{\rm st}(f))). \end{aligned}$$

さらに F_∞ は $H^{0,0}(M_{\rm st}(f))$ (右辺の第一因子) 上に $(-1)^m$ で作用すると仮定する.
$M_{\rm sp}(f)$ については

$$\wedge^{2^m} M_{\rm sp}(f) \cong T(2^{m-1}(mk - \frac{m(m+1)}{2})),$$

$$H_B(M_{\rm sp}(f)) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} = \oplus_{p,q} H^{p,q}(M_{\rm sp}(f)),$$

(p,q) は

$$\begin{aligned} & p = (k-i_1)+(k-i_2)+\cdots+(k-i_r), \quad q=(k-j_1)+(k-j_2)+\cdots+(k-j_s), \\ & r+s=m, \qquad 1 \leqq i_1 < \ldots < i_r \leqq m, \qquad 1 \leqq j_1 < \ldots < j_s \leqq m, \\ & \{i_1, \ldots, i_r\} \cup \{j_1, \ldots, j_s\} = \{1,2,\ldots,m\}, \end{aligned}$$

($r=0$ または $s=0$ の場合も含めて) をみたす全ての pair の上にわたる. さらに $w=mk-m(m+1)/2$ が偶数ならば, F_∞ の $H^{pp}(M_{\rm sp}(f))$ における固有値 $+1$ と -1 は同じ重複度で現れると仮定する.

Proposition 5.2. *Deligne* の予想を仮定する. $k > 2m$ ならば

$$c^{\pm}(M_{\rm st}(f) = \pi^{mk}((\langle f^\sigma, f^\sigma\rangle)_{\sigma\in J_E}.$$

この命題は Deligne の予想から予言される $L_{\rm st}(n,f)$ の critical value を Böcherer [Bocl], Mizumoto [M], Shimura [Sh10] の結果と比べて得られる. $L_{\rm st}(s,f)$ は $s \to 1-s$ について函数等式をもつ. 右半分にある critical values は $1 \leqq n \leqq k-m$, $n \equiv m \mod 2$ である. Böcherer の結果は $1 \leqq n \leqq m$ となる n を cover していない. Mizumoto の結果は $m \equiv 3 \mod 4$ のとき全ての critical value を cover する. Shimura の結果は一般的で任意の level の Hilbert-Siegel modular form に適用できるが, 結果は mod $\overline{\mathbf{Q}}^\times$ でのみ与えられている. また現在の case に特殊化すると $k > (3m/2)+1$ のとき全ての critical value を cover するが, 例外があって $n=1$, $m \equiv 1 \mod 2$ の場合は除外される. 志村先生によると, このときは Eisenstein series が nearly holomorphic にならないのであるが, この場合を含めることができればかなりの意味があるだろう.

$M_{\rm st}(f)$ と $M_{\rm sp}(f)$ に対して独立な周期がどれだけ存在するかは興味のあるところである. $J_E = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l\}$, $l = [E:\mathbf{Q}]$ とおき $x \in R \cong \mathbf{C}^{J_E}$ を $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(l)})$, $x^{(i)} \in \mathbf{C}$ とかく. $x \in E$ については $x^{(i)} = x^{\sigma_i}$ としてよい.

Theorem 5.3. $\mathbf{Q}$ 上の二つの *motives* が同一の *L-function* をもてば同型であると仮定する *(Tate* 予想*)*. このとき $p_1, p_2, \ldots, p_r \in \mathbf{C}^\times$, $1 \leqq r \leqq m+1$ があって, $M_{\rm st}(f)$ と $M_{\rm sp}(f)$ の任意の基本周期 $c \in R^\times$ に対して $c^{(1)} = \alpha\pi^A p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$, $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}^\times$ A, $a_i \in \mathbf{Z}$, $1 \leqq i \leqq r$ となる.

証明については [Y2] を参照されたい.

この理論により symplectic Shimura variety の zeta 函数についてある洞察をすることができる. $\Gamma\backslash\mathfrak{H}_m$ の zeta 函数は保型形式の spinor L 函数を用いて表わすことができると信じられている. ($m>2$ のとき実質的な結果は殆ど知られていない.) zeta 函数の形は概略

$$\zeta(s, \Gamma\backslash\mathfrak{H}_m) \fallingdotseq \prod_{\cdot} L_{\rm sp}(s,f).$$

であると予想される. $M = M_{\mathrm{sp}}(f)$ とおく. M の weight は w であり, $H_{\mathrm{DR}}(M)$ の filtration の最後の member は F^w である. F^w は 1 次元であり (3.4) により

$$F^w(H_{\mathrm{DR}}(M)) \cong H^0(M, \Omega^w).$$

となる.

$$\langle\ ,\ \rangle : M \otimes M \longrightarrow U$$

を M の polarization とする. ここに U はある rank 1 の motive を表わす. $0 \neq \omega \in F^w(H_{\mathrm{DR}}(M))$ をとる. このとき

$$\langle \omega, F_\infty \omega \rangle = c_1(M)\delta(M)^{-1}.$$

を示すことができる. 左辺は微分形式 ω の norm と解釈できるが, 次ぎの命題はこの事実と consistent である.

Proposition 5.4. 定理 5.3 と同じ仮定のもとで, $k > 2m$ ならば

$$(c_1(M)\delta(M)^{-1})^2 = (\pi^{mk}\langle f^\sigma, f^\sigma \rangle)^2_{\sigma \in J_E}$$

が成り立つ.

注意. 定理 5.3 において mod $\overline{\mathbf{Q}}^\times$ を mod $E^\times$ でおきかえた形に精密化することは可能である. Proposition 5.4 において, 等式は両辺の平方をとることなく成り立つと思われる.

References

[A] A. N. Andrianov, Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2, Uspekhi Math. Nauk 29(1974), 43–110.

[AK] A. N. Andrianov and V. L. Kalinin, On analytic properties of the standard zeta functions of Siegel modular forms, Math. Sbornik, 106(1978), 22–45.

[BH] S. Böcherer and B. Heim, Critical values for L-functions on $GSp_2 \times Gl_2$, preprint, 2000.

[Bl] D. Blasius, Appendix to Orloff: Critical values of certain tensor product L-functions, Inv. Math. 90(1987), 181–188.

[Boc1] S. Böcherer, Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen II, Math. Z. 189(1985), 81–110.

[Boc2] S. Böcherer, Über die Funktionalgleichung automorpher L-Funktionen zur Siegelschen Modulgruppe, J. reine angew. Math. 362(1985), 146–168.

[Bor] A. Borel, Automorphic L-functions, Proc. Symposia Pure Math. 33(1979), part 2, 27–61.

[Bou] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 7 et 8, Diffusion C.C.L.S., 1975.

[D] P. Deligne, Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales, Proc. Symposia Pure Math. 33(1979), part 2, 313–346.

[Ho] R. Howe, Remarks on classical invariant theory, Trans. Amer. Math. Soc. 313(1989), 539–570.

[Hu] A. Hurwitz, Über die Entwicklungskoefficienten der lemniskatischen Fuktionen, Math. Ann. 51 (1899), 196–226. (=Werke, Band II, LXVII)

[J] U. Jannsen, Motives, numerical equivalence, and semi-simplicity. Invent. Math. 107 (1992), 447–452.

[JKS] U. Jannsen, S. Kleiman and J-P. Serre (eds.), Motives, Proc. Symposia Pure Math. 55(1994), Part 1 and 2.

[L] R. P. Langlands, On the functional equation satisfied by Eisenstein series, Lecture notes in Math. 544, Springer, 1976.

[M] S. Mizumoto, Poles and residues of standard L-functions attached to Siegel modular forms, Math. Ann. 289(1991), 589–612.

[Sc] A. J. Scholl, Motives for modular forms, Inv. Math. 100(1990), 419–430.

[Sh1] G. Shimura, Sur les intégrales attachées aux formes automorphes, J. Math. Soc. Japan, 11 (1959), 291–311.

[Sh2] G. Shimura, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Iwanami Shoten and Princeton University Press, 1971.

[Sh3] G. Shimura, The special values of the zeta functions associated with cusp forms, Comm. Pure and applied Math. 29 (1976), 783–804.

[Sh4] G. Shimura, On the periods of modular forms, Math. Ann. 229(1977), 211–221.

[Sh5] G. Shimura, Confluent hypergeometric functions on tube domains, Math. Ann. 260 (1982), 269–302.

[Sh6] G. Shimura, On differential operators attached to certain representations of classical groups, Inv. Math. 77(1984), 463–488.

[Sh7] G. Shimura, Euler products and Fourier coefficients of automorphic forms on symplectic groups, Inv. Math. 116(1994), 531–576.

[Sh8] G. Shimura, Convergence of zeta functions on symplectic and metaplectic groups, Duke Math. J. 82(1996), 327–347.

[Sh9] G. Shimura, Euler products and Eisenstein series, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Number 93, 1997, American Mathematical Society.

[Sh10] G. Shimura, Arithmeticity in the theory of automorphic forms, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 82, 2000, Amer. Math. Soc.

[St] J. Sturm, The critical values of zeta functions associated to the symplectic group, Duke Math. J. 48(1981), 327–350.

[W] A. Weil, Number theory, an approach through history, Birkhäuser, 1984.

[Y1] H. Yoshida, On the zeta functions of Shimura varieties and periods of Hilbert modular forms, Duke Math. J. 75(1994), 121–191.

[Y2] H. Yoshida, Motives and Siegel modular forms, Amer. J. Math. 123(2001), 1171–1197.

[Y3] H. Yoshida, Book review of G. Shimura "Arithmeticity in the theory of automorphic forms", to appear in Bulltin of AMS, July 2002.